Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints

Philippe Jaming

Université de Bordeaux

Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints

Théorème (Théorème spectral)

H un espace de Hilbert T opérateur $H \to H$ compact auto-adjoint. Alors $\exists$

- *un ensemble I fini ou dénombrable*
- *une décomposition de H en sous-espaces mutuellement orthogonaux*

$$H = \ker T \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i$$

où chaque E_i est de dimension finie ;

- *une suite $(\lambda_i)_{i \in I}$ avec $|\lambda_i|$ décroissante et si I n'est pas fini, $\lambda_i \to 0$;*

t.q.

$$T = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi_i \quad \pi_i \text{ projection orthogonale sur } E_i.$$

Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints

Théorème (Théorème spectral)

H un espace de Hilbert T opérateur $H \to H$ compact auto-adjoint. Alors $\exists$

- *un ensemble I fini ou dénombrable*
- *une décomposition de H en sous-espaces mutuellement orthogonaux*
$$H = \ker T \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i$$
où chaque E_i est de dimension finie ;
- *une suite $(\lambda_i)_{i \in I}$ avec $|\lambda_i|$ décroissante et si I n'est pas fini, $\lambda_i \to 0$;*

t.q.
$$T = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi_i \quad \pi_i \text{ projection orthogonale sur } E_i.$$

Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints

Théorème (Théorème spectral)

H un espace de Hilbert T opérateur $H \to H$ compact auto-adjoint.
Alors $\exists$

- *un ensemble I fini ou dénombrable*
- *une décomposition de H en sous-espaces mutuellement orthogonaux*

$$H = \ker T \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i$$

où chaque E_i est de dimension finie ;

- *une suite $(\lambda_i)_{i \in I}$ avec $|\lambda_i|$ décroissante et si I n'est pas fini, $\lambda_i \to 0$;*

t.q.

$$T = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi_i \quad \pi_i \text{ projection orthogonale sur } E_i.$$

Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints

Théorème (Théorème spectral)

H un espace de Hilbert T opérateur $H \to H$ compact auto-adjoint.
Alors $\exists$

- *un ensemble I fini ou dénombrable*
- *une décomposition de H en sous-espaces mutuellement orthogonaux*
$$H = \ker T \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i$$
où chaque E_i est de dimension finie ;
- *une suite $(\lambda_i)_{i \in I}$ avec $|\lambda_i|$ décroissante et si I n'est pas fini, $\lambda_i \to 0$;*

t.q.
$$T = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi_i \quad \pi_i \text{ projection orthogonale sur } E_i.$$

Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints

Théorème (Théorème spectral)

H un espace de Hilbert T opérateur $H \to H$ compact auto-adjoint. Alors $\exists$

- *un ensemble I fini ou dénombrable*
- *une décomposition de H en sous-espaces mutuellement orthogonaux*
  $$H = \ker T \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i$$
  où chaque E_i est de dimension finie ;
- *une suite $(\lambda_i)_{i \in I}$ avec $|\lambda_i|$ décroissante et si I n'est pas fini, $\lambda_i \to 0$;*

t.q.

$$T = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi_i \quad \pi_i \text{ projection orthogonale sur } E_i.$$

Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints

Théorème (Théorème spectral)

H un espace de Hilbert T opérateur $H \to H$ compact auto-adjoint. Alors $\exists$

- *un ensemble I fini ou dénombrable*
- *une décomposition de H en sous-espaces mutuellement orthogonaux*
$$H = \ker T \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i$$
où chaque E_i est de dimension finie ;
- *une suite $(\lambda_i)_{i \in I}$ avec $|\lambda_i|$ décroissante et si I n'est pas fini, $\lambda_i \to 0$;*

t.q.
$$T = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi_i \quad \pi_i \text{ projection orthogonale sur } E_i.$$

Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints

Théorème (Théorème spectral)

H un espace de Hilbert T opérateur $H \to H$ compact auto-adjoint. Alors $\exists$

- *un ensemble I fini ou dénombrable*
- *une décomposition de H en sous-espaces mutuellement orthogonaux*

$$H = \ker T \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i$$

  où chaque E_i est de dimension finie ;
- *une suite $(\lambda_i)_{i \in I}$ avec $|\lambda_i|$ décroissante et si I n'est pas fini, $\lambda_i \to 0$;*

t.q.

$$T = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi_i \quad \pi_i \text{ projection orthogonale sur } E_i.$$

Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints

Théorème (Théorème spectral)

H un espace de Hilbert T opérateur $H \to H$ compact auto-adjoint. Alors $\exists$

- *un ensemble I fini ou dénombrable*
- *une décomposition de H en sous-espaces mutuellement orthogonaux*
$$H = \ker T \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i$$
où chaque E_i est de dimension finie ;
- *une suite $(\lambda_i)_{i\in I}$ avec $|\lambda_i|$ décroissante et si I n'est pas fini, $\lambda_i \to 0$;*

t.q.
$$T = \sum_{i\in I} \lambda_i \pi_i \quad \pi_i \text{ projection orthogonale sur } E_i.$$

Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints

Théorème (Théorème spectral)

H un espace de Hilbert T opérateur $H \to H$ compact auto-adjoint. Alors $\exists$

- *un ensemble I fini ou dénombrable*
- *une décomposition de H en sous-espaces mutuellement orthogonaux*
$$H = \ker T \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i$$
où chaque E_i est de dimension finie ;
- *une suite $(\lambda_i)_{i \in I}$ avec $|\lambda_i|$ décroissante et si I n'est pas fini, $\lambda_i \to 0$;*

t.q.
$$T = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi_i \quad \pi_i \text{ projection orthogonale sur } E_i.$$

Théorème spectral - commentaires

Si on choisit $(e_{k,i})_{k=1,\ldots,n_i}$ ($n_i = \dim E_i$) une b.o.n. de E_i,

$$\pi_i x = \sum_{k=1}^{n_i} \langle x, e_{k,i} \rangle e_{k,i}$$

donc

$$Tx = \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_i \langle x, e_{k,i} \rangle e_{k,i}.$$

Donc T est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Attention Pour obtenir une base de H, il faut ajouter une base de $\ker T$ ce qui suppose que $\ker T$ soit *séparable* (donc H aussi).

Théorème spectral - commentaires

Si on choisit $(e_{k,i})_{k=1,\ldots,n_i}$ ($n_i = \dim E_i$) une b.o.n. de E_i,

$$\pi_i x = \sum_{k=1}^{n_i} \langle x, e_{k,i}\rangle e_{k,i}$$

donc

$$Tx = \sum_{i\in I}\sum_{k=1}^{n_i} \lambda_i \langle x, e_{k,i}\rangle e_{k,i}.$$

Donc T est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Attention Pour obtenir une base de H, il faut ajouter une base de $\ker T$ ce qui suppose que $\ker T$ soit *séparable* (donc H aussi).

Théorème spectral - commentaires

Si on choisit $(e_{k,i})_{k=1,\dots,n_i}$ ($n_i = \dim E_i$) une b.o.n. de E_i,

$$\pi_i x = \sum_{k=1}^{n_i} \langle x, e_{k,i} \rangle e_{k,i}$$

donc

$$Tx = \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_i \langle x, e_{k,i} \rangle e_{k,i}.$$

Donc T est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Attention Pour obtenir une base de H, il faut ajouter une base de $\ker T$ ce qui suppose que $\ker T$ soit *séparable* (donc H aussi).

Théorème spectral - commentaires

Si on choisit $(e_{k,i})_{k=1,\ldots,n_i}$ ($n_i = \dim E_i$) une b.o.n. de E_i,

$$\pi_i x = \sum_{k=1}^{n_i} \langle x, e_{k,i} \rangle e_{k,i}$$

donc

$$Tx = \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_i \langle x, e_{k,i} \rangle e_{k,i}.$$

Donc T est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Attention Pour obtenir une base de H, il faut ajouter une base de $\ker T$ ce qui suppose que $\ker T$ soit *séparable* (donc H aussi).

Théorème spectral - commentaires

Si on choisit $(e_{k,i})_{k=1,\ldots,n_i}$ ($n_i = \dim E_i$) une b.o.n. de E_i,

$$\pi_i x = \sum_{k=1}^{n_i} \langle x, e_{k,i} \rangle e_{k,i}$$

donc

$$Tx = \sum_{i\in I} \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_i \langle x, e_{k,i} \rangle e_{k,i}.$$

Donc T est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Attention Pour obtenir une base de H, il faut ajouter une base de $\ker T$ ce qui suppose que $\ker T$ soit *séparable* (donc H aussi).

Théorème spectral - commentaires

Si c'est le cas, on aimerait écrire, $|\lambda_k|$ décroit vers 0 et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ b.o.n. de H et

$$Tx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$$

Pour cela, on commence par renuméroter $\bigcup_{i\in I}(e_{k,i})_{k=1,\dots,n_i}$ et y ajouter une base de $\ker T$.

Si $\ker T$ est de dimension finie, on met cette base au début et si c'est de co-dimension finie, à la fin.

Sinon, on insère un élément sur deux de chaque base, mais on perd $|\lambda_k|$ décroit

Théorème spectral - commentaires

Si c'est le cas, on aimerait écrire, $|\lambda_k|$ décroit vers 0 et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ b.o.n. de H et

$$Tx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$$

Pour cela, on commence par renuméroter $\bigcup_{i\in I}(e_{k,i})_{k=1,\ldots,n_i}$ et y ajouter une base de $\ker T$.

Si $\ker T$ est de dimension finie, on met cette base au début et si c'est de co-dimension finie, à la fin.

Sinon, on insère un élément sur deux de chaque base, mais on perd $|\lambda_k|$ décroit

Théorème spectral - commentaires

Si c'est le cas, on aimerait écrire, $|\lambda_k|$ décroit vers 0 et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ b.o.n. de H et

$$Tx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$$

Pour cela, on commence par renuméroter $\bigcup_{i\in I}(e_{k,i})_{k=1,\dots,n_i}$ et y ajouter une base de $\ker T$.
Si $\ker T$ est de dimension finie, on met cette base au début et si c'est de co-dimension finie, à la fin.
Sinon, on insère un élément sur deux de chaque base, mais on perd $|\lambda_k|$ décroit

Théorème spectral - commentaires

Si c'est le cas, on aimerait écrire, $|\lambda_k|$ décroit vers 0 et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ b.o.n. de H et

$$Tx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$$

Pour cela, on commence par renuméroter $\bigcup_{i\in I}(e_{k,i})_{k=1,\dots,n_i}$ et y ajouter une base de $\ker T$.

Si $\ker T$ est de dimension finie, on met cette base au début et si c'est de co-dimension finie, à la fin.

Sinon, on insère un élément sur deux de chaque base, mais on perd $|\lambda_k|$ décroit

Théorème spectral - commentaires

Si c'est le cas, on aimerait écrire, $|\lambda_k|$ décroit vers 0 et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ b.o.n. de H et

$$Tx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$$

Pour cela, on commence par renuméroter $\displaystyle\bigcup_{i\in I}(e_{k,i})_{k=1,\ldots,n_i}$ et y ajouter une base de $\ker T$.
Si $\ker T$ est de dimension finie, on met cette base au début et si c'est de co-dimension finie, à la fin.
Sinon, on insère un élément sur deux de chaque base, mais on perd $|\lambda_k|$ décroit